Begrijp je?

Ronald Keijzer
Frans van Galen

Kinderen krijgen inzicht in breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen

JSW JAARGANG 91, FEBRUARI 2007

De Beeldredaktie

Met elkaar praten over maten op de gezamenlijke tekening

Veel leerlingen vinden breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen moeilijke onderwerpen. Leerkrachten zien dat leerlingen vaak niet begrijpen wat ze aan het doen zijn en ze ervaren het programma als overladen. Veel teams kiezen als oplossing het organiseren van de rekenlessen in niveaugroepen. Daardoor blijven sommige groepen leerlingen lang bezig met breuken en leren ze heel weinig over kommagetallen en procenten. En dat terwijl in het dagelijks leven kommagetallen en procenten een veel grotere rol spelen dan breuken. Door zelf te redeneren worden sommen weer

In het onderwijs leggen we veel nadruk op rekenprocedures. Veel scholen streven er bijvoorbeeld naar dat alle leerlingen aan het eind van de basisschool breuken gelijknamig kunnen maken, en ermee kunnen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Op het niveau van kale sommen, buiten een context, is dat voor de meeste leerlingen veel te veel gevraagd. Het uitvoeren van die rekenprocedures verwordt voor veel leerlingen tot het toepassen van onbegrepen regeltjes.

KIEZEN VOOR REDENEREN EN BEGRIJPEN

In het vorig jaar verschenen boek *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen* van het TAL-project* pleiten wij voor een benadering waarin de nadruk verschuift van het oefenen van rekenprocedures naar het ontwikkelen van begrip. Voor een groot deel van de leerlingen kunnen we volstaan met geringe eisen ten aanzien van het beheersen van formele rekenregels. Dit geldt zowel voor breuken, als voor procenten en kommagetallen. Voor wat betreft de breuken is het voor de meeste leerlingen voldoende als ze bewerkingen kunnen uitvoeren met eenvoudige breuken. En dan ook nog binnen een vrij concrete context. Belangrijk is vooral dat leerlingen kunnen beredeneren wat ze doen. Ze moeten bijvoorbeeld in staat zijn aan de hand van een strook uit te leggen hoe je van halven en derden zesden kunt maken, en waarom 1/2 + 1/3 dus evenveel is als 5/6. Alleen leerlingen met veel inzicht zouden dit uiteindelijk moeten kunnen generaliseren naar regels die gelden voor willekeurige breuken.

EEN PRIJSSTICKER MET EEN VLEK

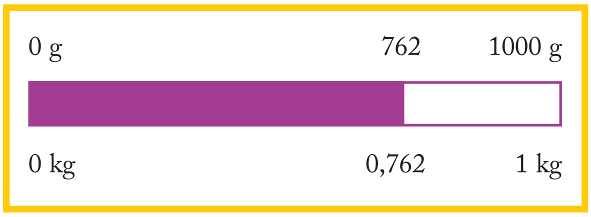
Waar we in het basisonderwijs naar moeten streven is dat alle leerlingen een goed begrip ontwikkelen voor wat breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen zijn. Op het punt van de beheersing van rekenregels is er echter differentiatie mogelijk. Met het volgende voorbeeld willen we laten zien dat dat soms kan betekenen dat leerlingen met verschillende uitkomsten komen, meer of minder precies.
In figuur 1 staat de prijssticker afgebeeld van een zak appels. Je kunt er op aflezen wat het gewicht is en wat ze per kilo kosten, maar op de uiteindelijke prijs zit een vlek. De vraag die we leerlingen stelden is: wat zou je ongeveer moeten betalen voor die zak appels?

Figuur 1: Wat zou je ongeveer moeten betalen?

Met opzet kozen we voor een open formulering. Het antwoord hoefde niet precies te zijn. Het effect was dat alle leerlingen van groep 7 en 8 waaraan we deze vraag voorlegden met zinnige antwoorden kwamen. Dat gold ook voor de minder goede rekenaars. Antwoorden waren bijvoorbeeld:

- 0,762 kg is ongeveer 1 kilo, dus de appels kosten ongeveer € 1,20.
- 0,762 kg is minder dan een kilo, dus moet je ook minder dan € 1,20 betalen.
- 0,762 kg is ongeveer 3/4 kilo; de appels kosten ongeveer 3/4 van € 1,20, dus 90 cent.
- Als een kilo € 1,20 kost, dan kost 100 gram 12 cent. De appels kosten samen iets meer dan 7 x 12 cent.

Opvallend was dat geen van de leerlingen aan wie we het probleem voorlegden zag dat je hier een vermenigvuldiging kunt uitrekenen, namelijk 0,762 x € 1,20. Ze wisten niet hoe ze de rekenmachine konden gebruiken bij deze opgave. Met wat gezond verstand kwamen de leerlingen echter toch een heel eind. Voor de redeneringen waar ze mee kwamen heb je inzicht nodig:



figuur 2

- Het eerste en tweede antwoord steunt op het herkennen van 0,762 als ‘ongeveer 1’ of als ‘minder dan 1’. Maar hoe zie je zoiets aan een kommagetal? Uiteraard zou je dat kunnen weten op basis van een of ander regeltje, maar echt begrijpen waarom het zo is vergt inzicht in de structuur van kommagetallen.
- Voor het omzetten van 0,762 kg naar een gewicht in grammen is inzicht in maatwisseling nodig. Als steun kunnen we daarbij denken aan een mentale voorstelling van een dubbele strook of een dubbele getallenlijn (figuur 2) met aan de ene kant grammen en aan de andere kilogrammen.
- Bedenken dat 0,762 kilo ongeveer 3/4 kilo is, vraagt niet alleen dat leerlingen 0,75 koppelen aan 3/4, maar ze moeten ook 0,762 kunnen verbinden met 0,75. Leerlingen kunnen dat bedenken vanuit hun kennis van de structuur van kommagetallen of via het houvast dat de context van gewicht biedt. 762 gram ligt dicht bij 750 gram en is dus ongeveer 3/4 kilo.
- Bedenken dat 100 gram 12 cent kost vraagt inzicht in evenredigheden. Uitgaande van ‘€ 1,20 per kilo’ kun je beredeneren wat de prijs is van twee kilo, of van een halve kilo, maar ook van twee-en-halve kilo.

Wij kozen ervoor de kinderen in kleine groepjes te interviewen, want zo konden we nauwkeurig observeren hoe de kinderen te werk gingen. In een gewone les is een dergelijke nauwkeurige observatie niet mogelijk, maar is het natuurlijk wel belangrijk na te gaan hoeveel inzicht leerlingen hebben. Het probleem van de prijssticker kan hier goed bij gebruikt worden. Het gesprek in de klas kan zich richten op de vraag hoe je weet dat de prijs van 3/4 kilogram een goede benadering geeft van de te betalen prijs. In een dergelijk gesprek kunnen de leerlingen ook uitzoeken hoe je een preciezer antwoord kunt krijgen en of een rekenmachine daarbij wellicht van pas kan komen.

DIFFERENTIATIE

De redeneringen waar de leerlingen mee kwamen, vereisen inzicht in de structuur van kommagetallen, inzicht in evenredigheden, inzicht in maatwisseling en inzicht in de orde van grootte van kommagetallen. De leerlingen lieten zien dat ze de relatie tussen de positie van cijfers in een kommagetal en de waarde van die cijfers begrepen. Ze wisten dat er een vaste verhouding bestaat tussen prijs en gewicht en dat het overstappen van kilogrammen op grammen het rekenen met gehele getallen mogelijk maakt.

Antwoorden gebaseerd op inzicht mogen best verschillen

Dit zijn allemaal zaken die de kern raken van het daadwerkelijk begrijpen van kommagetallen en verhoudingen. Niet tot die kern hoort bijvoorbeeld het cijferen met kommagetallen. Dit cijferen - een procedure waarbij de komma wordt ‘verschoven’ of eerst wordt weggehaald en dan teruggeplaatst - is op zich niet veel moeilijker dan het cijferen met gewone getallen, maar voor de meeste leerlingen blijft het een onbegrepen truc. De kans is groot dat leerlingen bij het uitvoeren fouten maken.
Bij het gegeven voorbeeld van de sticker op de zak met appels kwamen de leerlingen met verschillende antwoorden maar elk antwoord was gebaseerd op inzicht. Er ontstond op een vanzelfsprekende manier differentiatie tussen de leerlingen, we zouden het ‘differentiatie naar precisie’ kunnen noemen. Het lijkt een goed idee om vaker dergelijke open opgaven te geven, want we geven alle leerlingen zo de mogelijkheid te laten zien hoe ver hun inzicht reikt.
We benadrukken dus dat het bijbrengen van inzicht voorop moet staan en niet het aanleren van allerlei rekenregeltjes. Natuurlijk moeten we erkennen dat niet alle leerlingen evenveel inzicht zullen ontwikkelen, maar aan het inzicht dat ze opdoen hebben ze veel meer dan aan de regeltjes. Kennis van rekenregels is kwetsbaar als het niet op begrip is gebaseerd. Omgekeerd kan een leerling die het in een bepaalde situatie een passend rekenregeltje niet kent met wat basale kennis en inzicht in de

betekenis van breuken, kommagetallen en verhoudingen toch een heel eind komen.

KERNINZICHTEN

We noemen inzichten die er voor leerlingen werkelijk toe doen als 'kerninzichten'. Bij breuken gaat het bijvoorbeeld om het inzicht dat meet- en verdeelsituaties tot breuken kunnen leiden en om inzicht in de gelijkwaardigheid van breuken. Ook moeten leerlingen begrijpen dat breuken verhoudingen aangeven, zowel bij het snijden van een pizza, als bij '750 van de 1000 is 3/4 deel'. Bij kommagetallen gaat het onder andere om het idee van maatverfijning: als 3,2 een te grove beschrijving is, kun je via preciezer meten komen tot 3,18 of 3,184. Bij procenten gaat het om het werken met een vaste breuk, namelijk honderdsten.

Door deze kerninzichten centraal te stellen, verschuift het zwaartepunt in het onderwijs van 'kunnen' naar 'begrijpen'. Daarbij kan er meer verantwoordelijkheid worden gelegd bij de leerlingen. Veel aandacht komt te liggen op het onderzoeken van contextproblemen, waarbij leerlingen hun eigen aanpak beargumenteren en reageren op de aanpak van anderen. Elkaar overtuigen en samen zoeken naar passende redeneringen vormen dan de kern van het onderwijs. Al doende ontdekken leerlingen de functie van breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen. Tot op zekere hoogte vinden ze die functie als het ware opnieuw uit.

Breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen lijken in het basisonderwijs samen soms een bijna onneembaar obstakel. Dat hangt echter sterk samen met opvattingen over wat het onderwijs moet opleveren. Wanneer we de opbrengst niet zozeer formuleren in termen van het beheersen van rekenprocedures maar vooral in termen van het kunnen redeneren, dan ontstaat er lucht. Breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen worden dan hanteerbaar, zowel voor de leerlingen als voor hun leerkracht.

De auteurs zijn werkzaam bij het Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.

LITERATUUR

- Figueiredo, N. en Van Herpen, E. (2006). Breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen. Snappen of trainen? *Volgens Bartjens…* 25 (3). 8-9.
- Van Galen, F. (2004). In de voetsporen van Simon Stevin. *Willem Bartjens* 23 (5). 16-19.
- Van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Van Herpen, E., en Keijzer, R.,(2005). *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen. Tussendoelen Annex Leerlijnen Bovenbouw Basisschool.* Groningen, Wolters-Noordhoff.
- Keijzer, R., Van Galen, F. en Gravemeijer, K. (2004). Kiezen voor de kern. *Volgens Bartjens…* 24 (1). 14-16.
- Keijzer, R. & Gravemeijer, K.P.E. (2005). Breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen in discussie. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 24 (2). 24-29.